

2008年度卒業論文

フラクタル図形の数理学教材化と
授業実践による地域貢献活動

近畿大学工学部電子情報工学科

応用数理研究室

電子情報工学科 05163038 児森奈緒美

2009年2月

目次

第1章 序論	- 1 -
第2章 数理科学科学習指導案例	
2.1 フラクタル図形	- 2 -
2.2 題材観	- 3 -
2.3 教師観	- 6 -
2.4 教育目標	- 6 -
2.5 授業計画と準備物	- 7 -
2.6 授業の展開	- 7 -
第3章 地域貢献活動としての授業実践	- 12 -
第4章 まとめと今後の課題	- 15 -
謝辞	- 17 -
参考文献	- 17 -

第1章 序論

我々は、フラクタル図形の典型例であるコッホ曲線やシルピンスキーのガasketを利用した講座を東広島市教育委員会との連携により平成15年度サイエンス・パートナーシップ・プログラム事業「教育連携講座」の一環として、東広島市立高美が丘中学校の生徒を対象にはじめて実践した。その実践結果については、[1]と[2]で報告されている。その実践の中で、我々は身近にフラクタル図形を観察できる実験として試験管内の氷の結晶成長を取り上げた。しかし、この実験には慣れが必要で、実際の講義の中では観察することができなかつた。幸いにも、成功した実験をビデオで撮影しておいたので、それを生徒に鑑賞させることによって講座をまとめることができた。その後、中学校や高等学校への出張講義や公開講座などの様々な機会を通して、教材の改善を実施してきた。

本研究では、フラクタル図形の数学教材としての有効性を指摘している。実際、開発した教材は等比数列や極限の数学教材として優れていることが教育実践により証明された。つまり、フラクタル図形をただ単に身近な現象から取り上げることによって数理科学教材化するのではなく、数学の視点からその本質を眺めることによってフラクタル図形が本来持つ数理的な特徴を明確にするという観点から数学教材化することが重要であるということである。更に、フラクタル図形の性質を数学によって明らかにした後で顕微鏡システムを利用した観察主体の講義を展開すれば、フラクタル図形の数理科学教材としての可能性が高まる。言い換えれば、現在に至るまで主に数学という枠組みの中で取り扱われてきたフラクタル図形を顕微鏡システムなどの装置を利用して自然界の至る所で近似的に観察される身近な図形、あるいは、『モノづくり』で応用される図形として捉え直すことによって、数学が自然現象の解明と科学技術の発達に大きな役割を果たしていることを認識させることができるということである。

また、大学という教育資源を活かした地域貢献活動の重要性が近年高まりつつある。そのような社会要請の中で、近畿大学工学部教職課程数学コースは『総合的な学習の時間』のための数理科学教材を開発するとともに、授業実践により開発した教材の有効性について検討し続けている。特に、授業実践は地域貢献活動の一環として位置づけられつつあり、その成果は[1, 2, 3, 4, 5, 6]で報告されている。

第2章 数理科学科学学習指導案例

2.1 フラクタル図形

『長さ（特に，周りの長さ）』に着目して図形を分類すると，大きく2つに分類される．『長さ』が測定できる図形とそうでない図形である．初等・中等教育段階で学習する図形はすべて前者に属する．例えば，次のような公式がすぐに想起されるであろう：

$$(\text{正 } n \text{ 角形の周りの長さ}) = n \times (\text{一辺の長さ})$$

$$(\text{円周の長さ}) = (\text{直径}) \times (\text{円周率})$$

ここで， と の違いに着目すると， は線分（直線の一部）で囲まれた図形であり， は曲線で形づくられた図形である．しかし，『長さ』が測定できるという性質を共有している．これは，『長さ』が測定できる図形かどうかを直線や曲線で囲まれているかどうかで判断することは不可能であることを意味している．実際，『長さ』が測定できる図形かどうかは図 2.1 に示すように測定する部分を拡大すればするほど直線とみなすことができる図形かどうかで判断される．

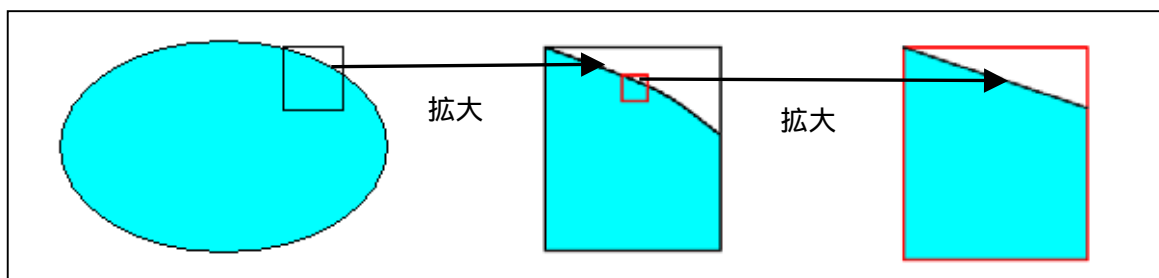


図 2.1. 『長さ』が測定できる図形の特徴

これを微分積分の考え方で表現すると次のようになる．

パラメータ表示された平面内の曲線 $C: (x, y) = (x(t), y(t))$ $[a \leq t \leq b]$ 上の任意の点 $P(x(t), y(t))$ と点 $Q(x(t+h), y(t+h))$ を考える． h が十分小さいとき（弧 PQ の長さ）が（線分 PQ の長さ）で常に近似できるならば，曲線 C は『長さ』を有する．

言い換えれば『長さ』を測定できない図形とは，どんなに拡大しても直線で近似できない，つまり，直線とみなすことができない図形である．その代表例がフラクタル図形である．[7]において，フラクタル図形は自己相似性を有する図形として定義されており，自己相似性とは一部分をいくら拡大しても全体と同じような構造が常に観察されるという性質を意味している．このようなフラクタル図形の定義や性質を理解するために，フラクタル図形の典型的な例であるコッホ曲線を本小節で紹介する．実際，コッホ曲線[8]は図 2.2 で提示されるように一見すると非常に複雑な曲線である．

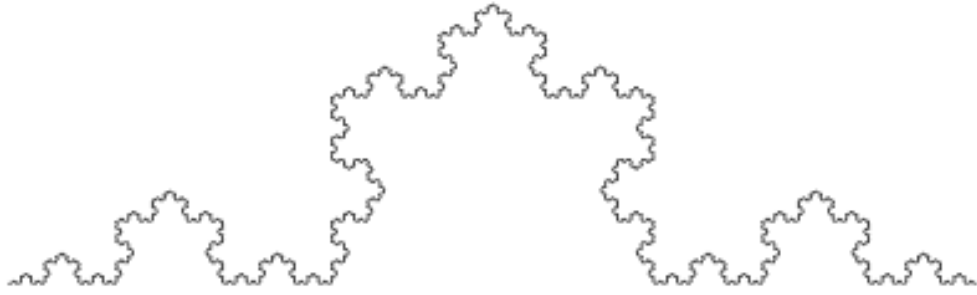


図 2.2. コッホ曲線

しかし，その描き方[8]は極めて単純である．

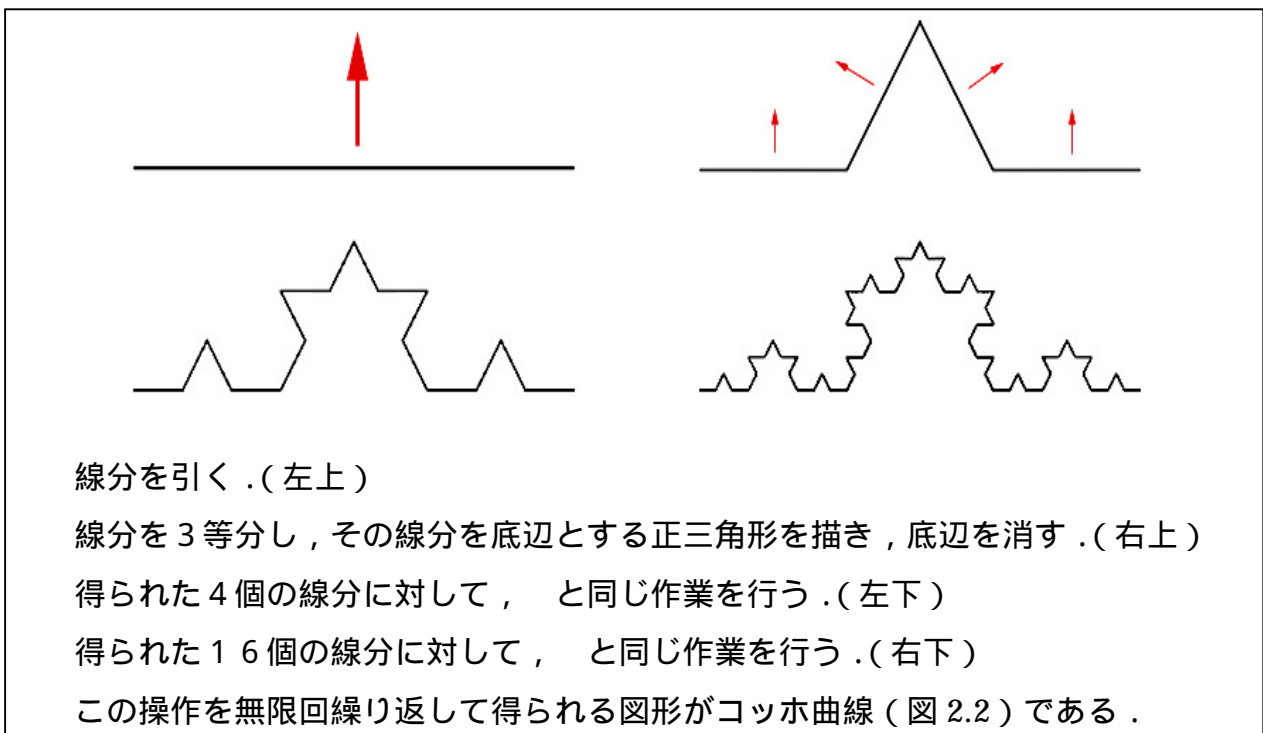


図 2.3. コッホ曲線の描き方

操作より，コッホ曲線は自己相似性としての折れ線を基本単位としていることが容易に認識される．

2.2 題材観

自然界にはさまざまな法則がある．代表例として，運動の法則(慣性の法則・作用反作用の法則・運動の法則)・ケプラーの3法則・万有引力の法則などが挙げられる．フラクタル図形も自然現象の一部として日常的に存在しているが，大きな存在である宇宙や小さな存在である素粒子の解明が目立ち，いかなる世界の中でも中間の大きさとして存在するフラクタル図形を取り上げた教材は少ない．

そこで，本題材ではフラクタル図形の1つであるシルピンスキーのガスケットを取り上

げる．シルピンスキーのガスケットを取り上げた理由としては2つ存在する．1つ目は講義内容を理解する上で必要とされる知識が平方根の四則演算と三平方の定理の応用問題として取り上げられる正三角形の面積の求積法という点である．2つ目は，シルピンスキーのガスケットは周りの長さや面積に着目すると等比数列や極限の数学教材として優れているという点である．従って，中学校第3学年の生徒が対象であれば，シルピンスキーのガスケットを作成するという数学的体験活動を通して平方根や三平方の定理の再確認ができ，更に，等比数列や極限操作を体感することができる．実際，シルピンスキーのガスケットの作図方法[9]を以下に提示する．

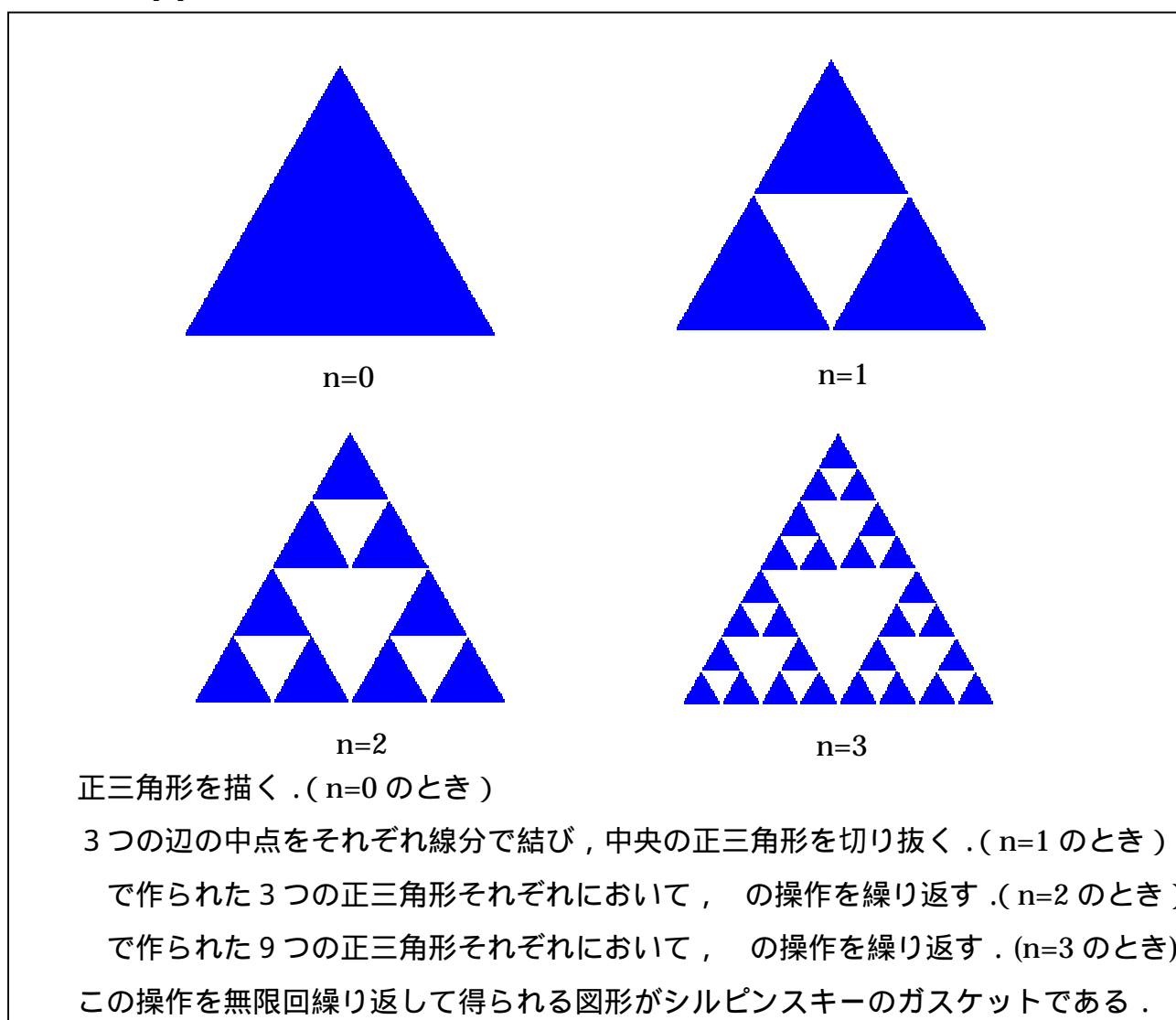


図 2.4. シルピンスキーのガスケットの作図方法

ここで，シルピンスキーのガスケットの性質をそれぞれの段階における正三角形の数・正三角形の一辺の長さ・周りの長さ・面積によって定量化すると，次の表 2.1 が得られる．この表からもわかるように以下のような等比数列が現れていることが確認できる：

正三角形の個数は，初項 $a_0=1$ ・公比3の等比数列である．

正三角形の一辺の長さは，初項 $b_0=1$ ・公比 $1/2$ の等比数列である．

周りの長さは，初項 $c_0=3$ ・公比 $3/2$ の等比数列である．

面積は，初項 $d_0=(3)/4$ ・公比 $3/2$ の等比数列である．

表 2.1. シルピンスキーのガスケットの性質

	正三角形の個数 a_n	一辺の長さ b_n	周りの長さ c_n	面積 d_n
n=0	1	1	3	$(3)/4$
n=1	3	1/2	9/2	$(3 \cdot 3)/16$
n=2	9	1/4	27/4	$(9 \cdot 3)/64$
n=3	27	1/8	81/8	$(27 \cdot 3)/256$
n=4	81	1/16	243/16	$(81 \cdot 3)/1024$
n=5	243	1/32	729/32	$(243 \cdot 3)/4096$
n=6	729	1/64	2187/64	$(729 \cdot 3)/16384$
n=7	2187	1/128	6561/128	$(2187 \cdot 3)/65536$
n=8	6561	1/256	19683/256	$(6561 \cdot 3)/262144$
n=9	19683	1/512	59049/512	$(19683 \cdot 3)/1048576$
n	3^n	$(1/2)^n$	$3(3/2)^n$	$(3/4) \times (3/4)^n$

更に，図 2.5 のグラフから以下のような性質が成り立つことが予想される．

正三角形の個数は無限大に発散する．

正三角形の一辺の長さは 0 に収束する．

周りの長さは無限大に発散する．

面積は 0 に収束する．

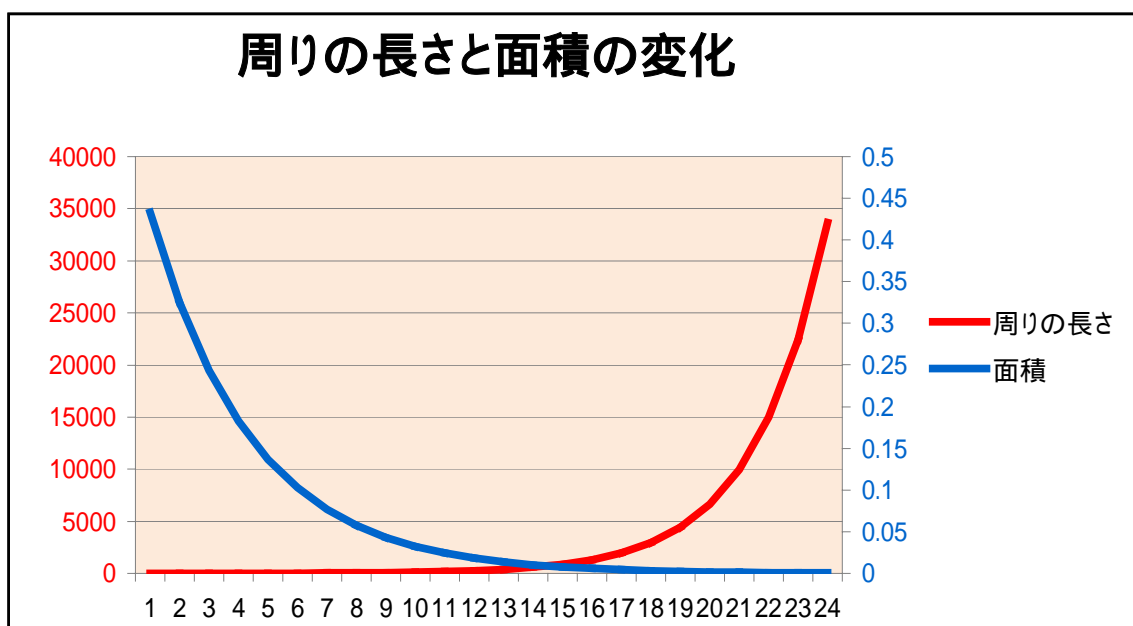


図 2.5. 周りの長さ と 面積の変化

この予想は，以下の定理により正しいことがわかる：

定理．数列 $\{r^n\}$ を考える．このとき，以下の性質が成り立つ：

- (1) $r > 1$ のとき， r^n は無限大に発散する．
- (2) $r = 1$ のとき， r^n は1に収束する．
- (3) $0 < r < 1$ のとき， r^n は0に収束する．

以上の考察からもわかるように，シルピンスキーのガスケットが持つ性質を定量化すると，等比数列を発見することができる．つまり，フラクタル図形は微分積分に基づく『長さ』が定義できないので，その特徴を把握するためには定性的な記述にとどまらず定量化や作図などによる可視化が必要不可欠である．

最後に，フラクタル図形の性質を等比数列や極限の考え方をを用いて説明する講義の後で，顕微鏡システムを用いた観察学習を実施する目的について述べる．厳密に言えば，フラクタル図形は無限回の操作による極限として定義されるので，自然界には存在しないであろう．しかし，顕微鏡システムを利用すれば，フラクタル図形を探するという観点から葉脈や昆虫の眼などを観察することによって『自己相似性』を発見できる．つまり，単なる観察実習から『自己相似性』を探し出す数理科学的な意味を持った観察実習が展開できる．これによって，フラクタル図形が数理科学教材として位置づけられる．

2.3 教師観

本教材は，地域貢献活動の一環として一般の人を対象にした教育実践でも活用される．つまり，年齢差のある集団に対する授業の教材としても活用される．従って，授業内容を理解させるための説明や机間指導に細心の注意が払われなければならない．質問などは積極的に受け付けるが，数学的体験活動や授業内容そのものの理解は容易なので，できる限り自ら積極的に授業に参加するよう促すことが重要である．その活動を通して，フラクタル図形と自然界に存在するものとの類似点を『自己相似性』という観点から調査する．

また，授業に顕微鏡システムを利用した数学的体験活動が含まれているので，参加者に数学的体験活動のみが印象づけられる可能性がある．フラクタル図形の特徴を数列や極限によって説明した点に常に留意させることが非常に重要である．

2.4 教育目標

次の教育目標を設定する：

フラクタル図形の特徴を数列と極限の観点から理解する．

シルピンスキーのガスケットの特性を等比数列により定量化することができる．

葉脈や昆虫の眼などを『自己相似性』の観点から観察することができる．

数理科学に関する興味や関心がより高まる。

2.5 授業計画と準備物

本教材は2時間で構成される。

	項目	内容
第1時	フラクタル	フラクタル図形の1つであるシルピンスキーのガスケットの作成を通して、等比数列や極限の観点からその性質を理解する。
第2時	観察実習	『自己相似性』の観点から、自然界に存在するものを顕微鏡システムによって観察する。

また、本講義で必要な準備物は次の通りである。

(1) 教師が準備するもの

シルピンスキーのガスケットのプリント と ・カッター・カッターマット
顕微鏡システム（実体顕微鏡と生物顕微鏡1台ずつ）・ラミネーター一式

(2) 参加者が準備するもの

筆記用具・顕微鏡システムで観察したいもの（採取してきた昆虫や植物など）

2.6 授業の展開

(1) 第1時の展開

時間	教師の活動	参加者の活動	指導上の留意点
導入 10分	<ul style="list-style-type: none"> ・プリント と を配布し、本時の数学的体験活動について説明する。 ・カッターとカッターマットを配布する。 ・三平方の定理の応用である正三角形の面積の求積法を板書する。 	<ul style="list-style-type: none"> ・プリントを受け取り、本時の活動について説明を聞きながら理解する。 ・カッターとカッターマットを受け取る。 ・正三角形の面積の求め方を復習する。 	

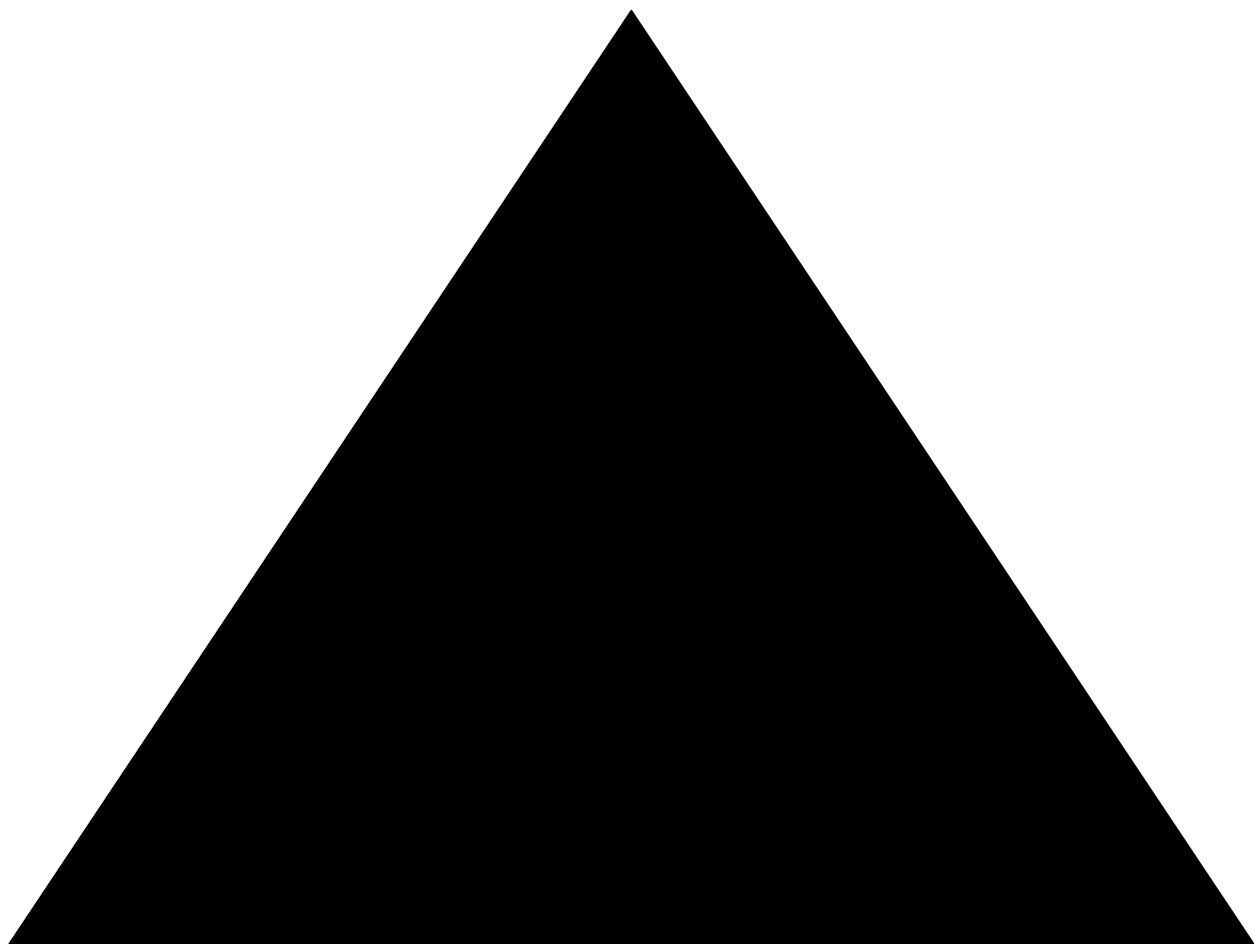
展 開	40 分	<ul style="list-style-type: none"> ・プリント の作業に取り掛かるよう促す． ・机間指導を行いながら，図形の変化を確認し，アドバイスを与えながら作業を促す． ・活動の各段階において，プリント の表を完成させるよう指導する． ・プリント と同じ表を黒板に書き，答えをあてはめさせる． ・プリント の表からシルピンスキーのガスケットの特徴について考察させる． 	<ul style="list-style-type: none"> ・プリント の作業を実行する． ・プリント の作業において，三角形が切り落ちないように各自工夫する． ・活動の各段階においてプリント の表を完成する． ・自分の作成した表の値と一致しているかを確認する． ・完成したプリント の表からシルピンスキーのガスケットの特徴について考察する． 	<ul style="list-style-type: none"> ・カッターでけがをしないように常に配慮する． ・すべての参加者に目を配り，『安全に活動を実施しているか』，『作成方法は間違っていないか』，『各段階においてプリント の表を完成させているか』を確認しながら，机間指導する． ・プリント の特性に気づかせるように，説明を加えながらプリント の表を確認させる． ・参加者自らがシルピンスキーのガスケットの特徴に気づくように説明を加えながら随時質問をし，発言を促す．
ま と め	10 分	<ul style="list-style-type: none"> ・シルピンスキーのガスケットの特徴を等比数列と極限を用いて整理させる． 	<ul style="list-style-type: none"> ・シルピンスキーのガスケットの特徴を等比数列と極限の考え方を用いて理解する． 	<ul style="list-style-type: none"> ・等比数列と極限の考え方により，シルピンスキーのガスケットの特徴を定量化できることを認識するように指導する．

(2) 第 2 時の展開

	時間	教師の活動	参加者の活動	指導上の留意点
導入	10分	<ul style="list-style-type: none"> ・顕微鏡システムの使い方について説明するとともに本時の数学的体験活動について説明する。 	<ul style="list-style-type: none"> ・顕微鏡システムの使い方と本時の数学的体験活動について理解する。 	
展開	40分	<ul style="list-style-type: none"> ・顕微鏡システムを用いて、スクリーンに観察画像を投影する。 ・観察して得られた画像はできる限りプリントアウトさせる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・顕微鏡システムを用いて、様々なものを『自己相似性』に着目しながら観察する。 ・スクリーンに投影された画像を観察しながら、改めて『自己相似性』について考察する。 ・観察して得られた画像はプリントアウトし、保存できるようラミネートする。 	<ul style="list-style-type: none"> ・参加者が『自己相似性』に注意を払うよう、常にコミュニケーションを心掛ける。 ・ラミネーターは高温になるので、参加者が火傷をしないよう細心の注意を払う。
まとめ	10分	<ul style="list-style-type: none"> ・近似的なフラクタル図形が自然界に存在していることや『モノづくり』に応用されていることを指導する。 	<ul style="list-style-type: none"> ・近似的なフラクタル図形が自然界に存在していることや『モノづくり』に応用されていることを認識する。 	<ul style="list-style-type: none"> ・できる限り、身近で理解し易い題材を提示するよう心掛ける。

(プリント)

シルピンスキーのガasketを作成しよう！



(プリント)

シルピンスキーのガスケットの性質を調べよう！

シェルピンスキーのガスケット

平成 XX 年 XX 月 XX 日

結果を次の表に完成させなさい。
最初の正三角形の一辺の長さを 1 とする。

回数	三角形の数	辺の長さ	周りの長さ	面積
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
n				

【問題】

この操作をどんどん繰り返すとそれぞれの値はどうなるのでしょうか？

第3章 地域貢献活動としての授業実践

我々は、第2章で開発した数理科学教材を利用して授業実践を行った。本章では、授業実践における実際の活動を中心に報告する。

日時：平成19年10月27日（土） 9:00～12:00

場所：東広島中央公民館

参加者：中学生1名・高校生1名・大学生3名・大人6名（合計11名）

授業者：伊藤昭夫（近畿大学工学部電子情報工学科准教授）

講座名：独立行政法人 科学技術振興機構

平成19年度地域科学技術理解増進活動推進事業機関活動支援〔採択事業〕

第1回数理科学ボランティア育成講座「ミクロの世界を覗いてみると」

第1時の展開

図2.4で示されたようにフラクタル図形の1つであるシルピンスキーのガasketを実際にカッターを用いて作成する。その過程において、1つの作業段階が終了するたびにプリントの空欄に適切な数値を記入する。写真3.1はそのときの活動の様子を撮影したものである。



(a) 紙を折ることによって辺の midpoint を決定している様子



(b) カッターを用いて作成している様子

写真 3.1. シルピンスキーのガスケットの作成活動

第 2 章でも述べたようにプリント を用いて表 2.1 のような表を完成させると、4 つの等比数列が現れていることがわかる。この数学的体験活動はあくまでもフラクタル図形をどのような手順で作成するのかを体験させる活動である。実際、フラクタル図形であるシルピンスキーのガスケットは図 2.4 で提示した操作を無限回実施したときに始めて実現される図形である。言い換えれば、有限回の操作では決して得ることのできない図形である。しかし、このような作図を体験させることによって、思考による無限回の操作（極限移行）を容易にする。

更に、等比数列によって定量化されたシルピンスキーのガスケットの長さや面積に着目する。このとき、シルピンスキーのガスケットは無限大の長さを有するにもかかわらず、面積は 0 という独特な性質を有する図形であることが分かる。

この性質は次のような問題を解決するための 1 つの鍵を与えてくれる。

問題：正三角形の土地の中に道路をできるだけ長く作りなさい。ただし、道路は線とみなし、面積は考慮しない。

この問題に対する答えは厳密には存在しない。しかし、シルピンスキーのガスケットは、道路を“むやみやたら”（つまり、不規則）に造成するのではなく、ある一定の規則に従って造成した方がより長い道路を効率よく造成できることを暗示している。

第2時の展開

第1時の講義を踏まえた上で、顕微鏡システムを利用した講義を行った。参加者は写真3.2に見られるようにただ単に顕微鏡を眺めるのではなく、『自己相似性』という新しい視点から植物の葉や昆虫などを観察するよう努めていた。言い換えれば、もし第1時においてシルピンスキーのガasketを等比数列によって定量化し、その図形の作成という数学的体験活動を通して極限移行を体感していなかったならば、参加者はただ単に顕微鏡を眺め、顕微鏡システムの性能に驚いているだけであったであろう。



写真 3.2. 顕微鏡システムを用いた観察実習の様子

第4章 まとめと今後の課題

フラクタル図形は自然界に現れる図形や「モノ作り」と密接な関連がある。第3章の中でも触れたように限られた領域の中で効率よく長さを得るためには不規則に線を描くのではなく、ある一定の規則に従って線を描いたほうがよい。そして、このような性質を持たせることによって機能するモノが身の回りには数多く存在する。

例えば、脳・肝臓・肺臓・腎臓など器官を取り巻く血管網はこのような規則を持っていると非常に都合がよい。何故ならば、臓器の大きさ（臓器が体内で占める空間）は限られているため、効率よくその臓器が持つ本来の役割を果たさなければならないからである。実際、脳や肺臓を取り巻く血管網はいたるところで効率よく酸素を供給し、二酸化炭素を回収しなければならない。また、肝臓や腎臓を取り巻く血管網は効率よく血管内の不廃物を濾過しなければならない。そして、そのためには大きさの限られた臓器の中に少しでも長く血管を張り巡らすことが必要不可欠である。

また、「モノづくり」という視点から考えてみると、例えば、自動車に装備されているラジエターの構造はある一定の規則に従っている。実際、限られた空間（エンジン・ルーム）の中で効率よくエンジンを冷やす役割をラジエターは果たしている。そのため、ある一定の規則を持たせることによって表面積をより大きくし、結果として、空気や冷却水に触れる面をできる限り多く持たせようという狙いがある。

このような視点からフラクタル図形を眺めさせるために、我々はフラクタル図形を数列や極限の教材として活用するとともに顕微鏡システムを利用した体験活動を取り入れることを提案する。また、顕微鏡システムを導入することにより、教育目標を変更することなく、[1]で報告されている試験管内での氷の結晶観察という数学的体験活動で生じた『実験の慣れ』という問題点を解消することができる。

しかし、その一方で以下のような問題点が浮き彫りとなった。

科学技術を意識した数学の視点からの数理科学教材の開発は急務であるが、その一方で、観察や実験などの数学的体験活動を教材の中に取り入れることは非常に難しい。言い換えれば、工学系学部が教育実践による教材の有効性の検証も含めて教材を開発する重要性が高まったとも言える。

数学と実験科学が連携する利点が存在すると我々は考える。実際、このような数学的体験活動を繰り返すことによって、数理科学への興味や関心が高まっていくことを期待している。そして、開発した数理科学教材の教育側面からの有効性は参加者の科学への興味や関心が高まったかどうかで判断されなければならない。しかし、科学への興味や関心は人間の内面的活動であり、その意識の高さをどのように数値化するかは今後の大き

な課題である。

開発した数理科学教材を学生が主体となった授業実践で用いて、その教材の有効性を検証する場の確保が非常に難しい。今回は独立行政法人科学技術振興機構平成19年度地域科学技術理解増進活動推進事業機関活動支援採択事業の一環として、東広島市教育委員会生涯学習課の支援の下で開催できたが、常にこのような支援が受けられる保証はどこにもない。学生が主体となるとその厳しさは更に増大する。今後、このような授業実践を地域貢献活動の1つとして位置づけ、学生が主体的に活動できる環境を教育機関・行政・市民が一体となって整備しなければならない。

謝辞

本研究の実施にあたり，授業者として御協力いただいた近畿大学工学部電子情報工学科の伊藤昭夫准教授・TA として御協力いただいた近畿大学大学院システム工学研究科2年の柳雄一先輩・開催場所として東広島市中央公民館を開放してくださいました東広島市教育委員会生涯学習課の方々にこの場を借りて御礼を申し上げます。

また，本活動で使用した2台の顕微鏡システムは，『第23回(2007年度)マツダ研究助成 - 青少年健全育成関係 - 』の支援の下で購入されていることをここに記すとともに感謝の意を表します。

参考文献

- [1] 山上佳澄，伊藤昭夫，工学部の視点から見たフラクタル図形の教材化を目指して，数学教育学会誌臨時増刊 2003 年度数学教育学会秋季例会発表論文集，数学教育学会，pp. 11-13，2003。
- [2] 東広島市立高美が丘中学校，近畿大学工学部，平成 15 年度サイエンス・パートナーシップ・プログラム事業「教育連携講座」実施報告書『応用数理学に触れてみよう』 - 数学の日常生活への応用を目指して - ，2004。
- [3] 伊藤昭夫，工学の視点から見た算数・数学教材の開発を目指して - 近畿大学工学部教職課程数学コースにおける実践事例 - ，数学教育学会誌，Vol. 44，pp. 71-84，2004。
- [4] 宮崎望，伊藤昭夫，工学的要素を取り入れた算数・数学教材の開発とその授業実践 - 光センサの利用を目指して - ，岐阜数学教育研究，Vol. 3，pp. 65-77，2006。
- [5] 伊藤昭夫，工学部学生の地域及び初等・中等教育において果たす役割とその実践，工学教育，Vol. 53，No. 6，pp. 80-84，2006。
- [6] 伊藤昭夫，井上靖浩，算数・数学実験を取り入れた数理科学教材の開発 - 電磁誘導現象の比例教材化 - ，近畿大学工学部紀要人文・社会科学篇，Vol. 36，pp. 43-64，2007。
- [7] 高安秀樹，本田勝也，佐野雅己，田崎晴明，村山和郎，伊東敬祐，フラクタル科学，朝倉書店，1987。
- [8] <http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B3%E3%83%83%E3%83%9B%E6%9B%B2%E7%B7%9A>
- [9] <http://www3.ocn.ne.jp/~fukiyo/math-obe/gasket.htm>